Equations différentielles linéaires

Equation linéaire scalaire d'ordre 1

Exercice 1 [00376] [correction]
Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $y' - y = \sin(2x)\mathrm{e}^x$
b) $y' + 2xy = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$
c) $y' + y\tan x = \sin 2x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$

Exercice 2 [00382] [correction]
Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{x^2-1}y = 2x$$

Exercice 3 [00377] [correction]
Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :
a) $y' - (x+1)(y+1) = 0$ et $y(0) = 1$
b) $(1+x^2)y' - (x+1)y = 2$ et $y(0) = -1$.

Exercice 4 [00379] [correction]
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + \mathrm{e}^y f(x)$$

Exercice 5 [00380] [correction]
Soit $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable.
Etablir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6 [00381] [correction]
a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = h$ converge vers 0 en $+\infty$.
b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f + f' \xrightarrow[+\infty]{} \ell$. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

Exercice 7 [03109] [correction]
Soient α un complexe de partie réelle strictement positive et une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' + \alpha f$ tend vers 0 en $+\infty$.
Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Equation vectorielle linéaire d'ordre 1

Exercice 8 [00384] [correction]
Soient $a, b \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $a \circ b = b \circ a$.
En considérant pour $x_0 \in E$, l'application $t \mapsto (\exp(ta) \circ \exp(tb))x_0$, établir $\exp(a+b) = \exp(a) \circ \exp(b)$.

Exercice 9 Mines-Ponts MP [02900] [correction]
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on identifie $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence de :
(i) A est antisymétrique ;
(ii) chaque solution du système différentiel $Y' = AY$ est de norme constante.

Exercice 10 [01320] [correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant

$$A^2 + I_{2n} = O_{2n}$$

Exprimer la solution de l'équation matricielle

$$X'(t) = AX(t)$$

Systèmes différentiels linéaire d'ordre 1

Exercice 11 [00385] [correction]
Résoudre le système différentiel réel suivant

$$\begin{cases} x' = \cos(t)\,x + \sin(t)\,y \\ y' = -\sin(t)\,x + \cos(t)\,y \end{cases}$$

Exercice 12 [00386] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x_1' = (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' = 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2 \end{cases}$$

Exercice 13 [00387] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1' = (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases}$$

Exercice 14 [00388] [correction]
Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 + tx_2 - \mathrm{e}^t \\ x_2' = -tx_1 + (1-t)x_2 + \mathrm{e}^t \end{cases}$$

Systèmes différentiels linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Exercice 15 [00389] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$$

Exercice 16 [00390] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + 8y + \mathrm{e}^t \\ y' = 2x + y + \mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$$

Exercice 17 Mines-Ponts MP [00391] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

Exercice 18 [00392] [correction]
Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z \\ y' = 10x - 5y + 7z \\ z' = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

Exercice 19 [00393] [correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et u un vecteur unitaire de E.
Résoudre l'équation

$$x' = u \wedge x$$

Exercice 20 Mines-Ponts MP [02902] [correction]
Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$$

Exercice 21 Centrale MP [02490] [correction]
On considère l'équation

$$x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2x^{(2)} - 2x' + x = 0$$

a) Montrer que $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est solution de E si, et seulement si,
$X = {}^t\begin{pmatrix} x & x' & x^{(2)} & x^{(3)} \end{pmatrix}$ est solution de $AX = X'$ avec A à déterminer.
b) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?
c) Montrer que

$$\mathbb{C}^4 = \ker(A - iI_4) \oplus \ker(A + iI_4) \oplus \ker(A - I_4)^2$$

d) Montrer qu'il existe P inversible telle que $P^{-1}AP = B$ avec B diagonale par blocs et triangulaire supérieure.
e) Déterminer les solutions de l'équation différentielle.

Equation linéaire scalaire d'ordre 2

Exercice 22 [00395] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t^2+1)y''-2y=t$$

en commençant par rechercher les polynômes solutions.

Exercice 23 [00396] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+t^2)^2y''(t)-2t(1+t^2)y'(t)+2(t^2-1)y(t)=(1+t^2)$$

On pourra commencer par rechercher une solution polynomiale de l'équation homogène.

Exercice 24 [00397] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation

$$t^3y''+ty'-y=0$$

Exercice 25 [00398] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation

$$t^2y''+ty'-y=1$$

Exercice 26 [00400] [correction]
Résoudre sur $]0,1[$ l'équation

$$x(1-x)y''+(1-3x)y'-y=0$$

en commençant par rechercher une fonction développable en série entière.

Exercice 27 [00401] [correction]
Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation

$$4(1-t^2)y''(t)-4ty'(t)+y(t)=0$$

en recherchant les fonctions développables en série entière.

Exercice 28 [01319] [correction]
Soit l'équation différentielle

$$E: xy''+3y'-4x^3y=0$$

a) Chercher une solution non nulle y_1 développable en série entière au voisinage de 0 et non nulle.
Préciser le rayon de convergence puis exprimer $y_1(x)$ à l'aide des fonctions usuelles, pour $x\in\,]0,+\infty[$
b) Trouver une solution y_2 de E sur $]0,+\infty[$ non colinéaire à y_1.
c) Décrire l'ensemble des solutions de E sur $]0,+\infty[$.

Exercice 29 [00402] [correction]
Soit $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue non nulle.
Montrer que toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+p(x)y=0$ s'annule.

Exercice 30 [01016] [correction]
a) Déterminer les séries entières solutions au voisinage de 0 de l'équation différentielle

$$y''+2xy'+2y=0$$

b) Exprimer parmi celles-ci celles dont la somme est une fonction paire.

Exercice 31 [00404] [correction]
a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+t^2)y''(t)+4t\,y'(t)+2y(t)=0$$

en recherchant les séries entières solutions.
b) Résoudre ensuite

$$(1+t^2)y''(t)+4t\,y'(t)+2y(t)=\frac{1}{1+t^2}$$

Exercice 32 Centrale MP [02455] [correction]
a) Résoudre l'équation différentielle

$$y''+y=\cos(nt)$$

b) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

Exercice 33 Mines-Ponts MP [02891] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$$

Exercice 34 Mines-Ponts MP [02892] [correction]
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x > 0, f'(x) = f(1/x)$.

Exercice 35 X MP [03110] [correction]
Soient $f \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[\,, \mathbb{R})$ et g une solution non identiquement nulle de

$$E : y'' + fy = 0$$

a) Montrer que les zéros de g sont isolés.
Dans la suite, x_1 et x_2 sont deux zéros consécutifs de g vérifiant $x_1 < x_2$.
b) Montrer, si $x \in [x_1, x_2]$

$$(x_2 - x)\int_{x_1}^{x} (t - x_1) f(t) g(t)\,\mathrm{d}t + (x - x_1)\int_{x}^{x_2} (x_2 - t) f(t) g(t)\,\mathrm{d}t = (x_2 - x_1) g(x)$$

c) En déduire une minoration de

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Exercice 36 Centrale MP [03111] [correction]
Soient $m \in \mathbb{R}^{+\star}$ et $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, q(t) \geqslant m$$

On note E l'équation différentielle $y'' + qy = 0$. Soit f une solution non nulle de E.
a) Montrer qu'il existe $p, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $p > 0$ telle que $f = p\cos g$ et $f' = p \sin g$.
b) Exprimer g' en fonction de g et q.
c) En déduire que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^+$ sur $g(\mathbb{R}^+)$.
d) Montrer que f s'annule une infinité de fois.

Exercice 37 [03240] [correction]
Soit $\alpha > 0$. Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$E_\alpha : x^2 y''(x) + xy'(x) - \alpha^2 y(x) = 0$$

On pourra étudier les fonctions propres de l'application

$$\varphi : y(x) \mapsto xy'(x)$$

Wronskien

Exercice 38 [00394] [correction]
Soient $a, b : I \to \mathbb{C}$ continues et (f_1, f_2) un système fondamental de solutions de l'équation

$$E : y'' + a(t)y'(t) + b(t)y = 0$$

Former une équation différentielle linéaire d'ordre 1 vérifiée par

$$w : t \mapsto \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}$$

Exercice 39 [00436] [correction]
Soit q une fonction continue, intégrable sur $[0, +\infty[$. Soit E l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0$$

a) Si f est une solution bornée de E sur $[0, +\infty[$, montrer que sa dérivée f' converge en $+\infty$.
Quelle est la valeur de cette limite ?
b) Soient f et g deux solutions bornées. Etudier le wronskien de f et de g

$$w = f'g - fg'$$

En déduire que f et g sont liées. Que peut-on en conclure ?

Exercice 40 Centrale PC [03100] [correction]
On considère l'équation différentielle

$$E_0 : y'' - \mathrm{e}^x y = 0$$

a) Soit y une solution de E_0 sur $\mathbb{R}$. Etudier la convexité de y^2.

En déduire que si $y(0) = y(1) = 0$ alors y est nulle sur $\mathbb{R}$.
b) Soient y_1 et y_2 deux solutions de E_0 telles que

$$(y_1(0), y_1'(0)) = (0,1) \text{ et } (y_2(1), y_2'(1)) = (0,1)$$

Démontrer que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0.
c) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Démontrer que l'équation différentielle $E : y'' - \mathrm{e}^x y = f(x)$ admet une unique solution y telle que $y(0) = y(1) = 0$.

Exercice 41 [00383] [correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ muni d'une base $\mathcal{B}$.
Soient $t \mapsto a(t)$ une application continue de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ vers $\mathcal{L}(E)$ et $t_0 \in [a,b]$.
Montrer que si les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ forment un système fondamental de solution de l'équation $x' = a(t)x$ alors son wronskien W dans la base $\mathcal{B}$ est déterminé par

$$W(t) = W(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(a(u))\mathrm{d}u$$

Méthode de variation des constantes

Exercice 42 [00405] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{1+t^2}$$

Exercice 43 [00406] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan t$$

Exercice 44 [00407] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \tan^2 t$$

Exercice 45 [00408] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + y = f$$

On exprimera la solution à l'aide d'une intégrale.
b) Déterminer la solution telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 46 [00409] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telles que

$$f + f'' \geqslant 0$$

Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$$

Exercice 47 Mines-Ponts MP [02893] [correction]
Résoudre sur $]0, \pi[$

$$y'' + y = \mathrm{cotan} x$$

Exercice 48 Mines-Ponts MP [02894] [correction]
a) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par variation des constantes :

$$y'' + y = 1/x$$

b) En déduire une expression de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

valable pour $x > 0$.
c) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$$

Exercice 49 Mines-Ponts MP [02896] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique. Existe-t-il $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique et solution de $y'' + y = f$?

Exercice 50 Mines-Ponts MP [02895] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ monotone ayant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que les solutions de l'équation $y'' + y = f$ sont bornées.

Exercice 51 [00417] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$y'' + \frac{2t}{t^2+1}y' + \frac{1}{(t^2+1)^2}y = \frac{t}{(t^2+1)^2}$$

en posant $x = \arctan t$.

Exercice 52 CCP MP [03292] [correction]
Résoudre l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - 3xy'' - y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(on pourra vérifier que l'application $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution de l'équation homogène associée)

Résolution avec raccord

Exercice 53 [00419] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$E : x^2y' - y = 0$$

Exercice 54 [00420] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\text{a) } xy' - y = x \text{b) } xy' + y - 1 = 0$$

$$\text{c) } xy' - 2y = x^4 \text{ d) } x(1+x^2)y' - (x^2-1)y + 2x = 0$$

Exercice 55 [00421] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\text{a) } \operatorname{sh}(x)y' - \operatorname{ch}(x)y = 1$$

$$\text{b) } (\mathrm{e}^x - 1)y' + \mathrm{e}^x y = 1$$

Exercice 56 [00422] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\text{a) } y'\sin x - y\cos x + 1 = 0 \text{ b) } (\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$$

Exercice 57 [00423] [correction]
Déterminer les solutions, s'il en existe, des problèmes de Cauchy suivants :
a) $(\tan x)y' - y = 0$ et $y(0) = 0$
b) $(\tan x)y' - y = 0$ et $y(0) = 1$.

Exercice 58 [00424] [correction]
Résoudre sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$x(x^2-1)y' + 2y = x^2$$

Exercice 59 [00425] [correction]
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0$$

en discutant selon les valeurs de α.

Exercice 60 [00426] [correction]
On considère l'équation différentielle

$$xy'' - y' - x^3 y = 0$$

a) Montrer que si y est solution sur I alors $x \mapsto y(-x)$ est solution sur I' symétrique de I par rapport à 0.
b) Résoudre sur $\mathbb{R}^{+\star}$ l'équation via le changement de variable $t = x^2$.
c) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$.

Exercice 61 [00427] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(t+1)^2y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$$

en commençant par rechercher les solutions polynomiales.

Exercice 62 [00428] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$E : (t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0$$

Exercice 63 [00429] [correction]
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$E : y' + y = \max(x, 0)$$

Exercice 64 Centrale MP [03061] [correction]
Soient

$$(E) : x(x-4)y' + (x-2)y = -2 \text{ et } (H) : x(x-4)y' + (x-2)y = 0$$

a) Résoudre H, quelles sont les solutions maximales ?
b) Résoudre E sur $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 4[$ et $I_3 =]4, +\infty[$.
c) En déduire les solutions maximales de E.

Exercice 65 Mines-Ponts MP [02889] [correction]
Résoudre

$$x \ln x\, y' - (3 \ln x + 1)y = 0$$

Exercice 66 Centrale PC [00105] [correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et g une solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = f(x)$$

a) Démontrer que g se prolonge par continuité en 0. Déterminer une condition nécessaire sur $f'(0)$pour que la fonction ainsi prolongée soit dérivable en 0.
Démontrer que cette condition n'est pas suffisante.
b) f est supposée de classe $\mathcal{C}^2$ et la condition précédente est vérifiée.
Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 67 Centrale PC [00506] [correction]
Soit (E) l'équation différentielle

$$(\ln x)y' + \frac{y}{x} = 1$$

a) Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
b) Soit g la fonction définie sur $]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Montrer que g se prolonge sur $]-1, +\infty[$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
c) Démontrer que (E) admet une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) $y(x) = (C + \sin^2 x)\mathrm{e}^x$
b) $y(x) = (x^2 + C)\mathrm{e}^{-x^2}$
c) $y(x) = C\cos x - 2\cos^2 x$

Exercice 2 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
Solution homogène : $y_0(x) = C\sqrt{x^2-1}$.
Par variation de la constante, solution particulière $y_1(x) = 2(x^2-1)$.
Solution générale : $y(x) = C\sqrt{x^2-1} + 2(x^2-1)$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) Solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$: $y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x+1)^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Solution particulière sur $\mathbb{R}$: $y_0(x) = -1$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x+1)^2} - 1 \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

On aura $y(0) = 1$ si, et seulement si, $C = 2/\sqrt{\mathrm{e}}$.
b) Solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$: $y(x) = C\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{\arctan x}$ avec $C \in \mathbb{R}$
Solution particulière sur $\mathbb{R}$: $y_0(x) = x - 1$ après recherche de solution de la forme $ax + b$.
Solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = C\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{\arctan x} + x - 1 \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

On aura $y(0) = -1$ si, et seulement si, $C = 0$.

Exercice 4 : [énoncé]
Soit f une solution.
Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0) = 0$.
De plus

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\mathrm{e}^x f(h) + \mathrm{e}^h f(x) - f(x)}{h} = \mathrm{e}^x\frac{f(h)-f(0)}{h} + \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h}f(x)$$

donc

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \mathrm{e}^x f'(0) + f(x)$$

Par suite f est dérivable en x et $f'(x) = f'(0)\mathrm{e}^x + f(x)$.
La fonction f est alors solution d'une équation différentielle de la forme $y' = y + C\mathrm{e}^x$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$.
Après résolution, on obtient

$$f(x) = Cx\mathrm{e}^x$$

Inversement, de telles fonctions sont solutions.

Exercice 5 : [énoncé]
La solution générale de l'équation étudiée est $y(t) = \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$ avec $A(t) = \int_0^t a(u)\mathrm{d}u$.
Or pour tout $t \geqslant 0$, $|A(t)| \leqslant \int_0^t |a(u)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{+\infty} |a(u)|\,\mathrm{d}u$ donc y est bornée.

Exercice 6 : [énoncé]
a) La solution générale de l'équation différentielle $y' + y = h$ est
$y(x) = \left(\lambda + \int_0^x h(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-x}$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \geqslant A, |h(t)| \leqslant \varepsilon$.
$y(x) = \left(\lambda + \int_0^A h(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-x} + \int_A^x h(t)\mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t$ avec $\left|\int_A^x h(t)\mathrm{e}^{t-x}\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$ et
$\left(\lambda + \int_0^A h(t)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
b) Posons $h = f' + f - \ell$. $f - \ell$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = h$ donc $f - \ell \xrightarrow[+\infty]{} 0$ puis $f \xrightarrow[+\infty]{} \ell$.

Exercice 7 : [énoncé]
Posons $g = f' + \alpha f$. La fonction f est solution de l'équation différentielle.

$$y' + \alpha y = g$$

La solution générale de cette équation différentielle est

$$y(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\alpha x} + \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, on peut écrire

$$f(x) = \lambda\mathrm{e}^{-\alpha x} + \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

Il est immédiat que $\lambda\mathrm{e}^{-\alpha x} \to 0$ quand $x \to +\infty$ car $\mathrm{Re}\alpha > 0$.
Etudions maintenant la limite du terme intégral.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction g tend vers 0 en $+\infty$, il existe $A \geqslant 0$ tel que

$\forall t \geqslant A, |g(t)| \leqslant \varepsilon$
On a alors pour tout $x \geqslant A$

$$\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t = \int_0^A g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t + \int_A^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_A^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_A^x \varepsilon\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\alpha)(t-x)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\alpha)(t-x)}\right]_A^x \leqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)}$$

et

$$\left|\int_0^A g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^A g(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t\right|\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)x} = C^{te}\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(\alpha)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Pour x assez grand on a alors

$$\left|\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\mathrm{Re}(\alpha)} + \varepsilon$$

Ainsi $\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha(t-x)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ puis $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 8 : [énoncé]
$\varphi : t \mapsto \exp(ta)\circ\exp(tb)x_0$ est dérivable et vérifie $\varphi'(t) = (a+b)\varphi(t)$. En effet
$(\exp(ta)\circ\exp(tb))' = a\circ\exp(ta)\circ\exp(tb) + \exp(ta)\circ b\circ\exp(tb)$ or
$b\circ\exp(ta) = \exp(ta)\circ b$ car a et b commutent donc
$(\exp(ta)\circ\exp(tb))' = (a+b)\circ\exp(ta)\circ\exp(tb)$. De plus $\varphi(0) = x_0$ donc
$\varphi(t) = \exp(t(a+b))x_0$. Puisque ceci vaut pour tout x_0 :
$\exp(t(a+b)) = \exp(ta)\circ\exp(tb)$ et pour $t=1$ la relation demandée.

Exercice 9 : [énoncé]
Soit Y une solution du système différentiel $Y' = AY$.
On a $({}^tYY)' = {}^tY'Y + {}^tYY' = {}^tY({}^tA + A)Y$.
Ainsi si A est antisymétrique, $({}^tYY)' = 0$ et Y est de norme constante.
Inversement, si chaque solution du système différentiel est de norme constante alors pour tout $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, ${}^tY_0({}^tA + A)Y_0 = 0$. Par suite 0 est la seule valeur propre de l'endomorphisme symétrique ${}^tA + A$ et puisque celui-ci est diagonalisable, on obtient ${}^tA + A = 0$ et enfin A antisymétrique.

Exercice 10 : [énoncé]
L'équation étudiée est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant. Sa solution générale peut être exprimée par une exponentielle

$$X(t) = \exp(tA)X(0)$$

avec

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^k$$

Or $A^2 = -I_{2n}$ donc, en séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs de cette série absolument convergente

$$\exp(tA) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}t^{2p}I_{2n} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}t^{2p+1}A = \cos(t)I_{2n} + \sin(t)A$$

Ainsi la solution générale de l'équation étudiée est

$$X(t) = \cos(t)X(0) + \sin(t)AX(0)$$

Exercice 11 : [énoncé]
Soit (x,y) solution sur $\mathbb{R}$.
On pose $z = x + iy$, on a $z'(t) = \mathrm{e}^{-it}z(t)$ donc $z(t) = C\mathrm{e}^{i\mathrm{e}^{-it}} = C\mathrm{e}^{i\cos t + \sin t}$ avec $C \in \mathbb{C}$.
En écrivant $C = A + iB$ avec $A, B \in \mathbb{R}$ on peut conclure

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}(A\cos(\cos(t)) - B\sin(\cos(t)))$$

et

$$y(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}(B\cos(\cos(t)) + A\sin(\cos(t)))$$

Vérification : il suffit de remonter les calculs.

Exercice 12 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène défini sur $\mathbb{R}$ d'équation matricielle $X' = A(t)X$ avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$\chi_{A(t)} = X^2 - (t+1)X + t$.

$\mathrm{Sp}(A(t)) = \{1, t\}$.
Si $t \neq 1$,

$$E_1(A(t)) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ et } E_t(A(t)) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Pour $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$ indépendant de t, $A(t) = PD(t)P^{-1}$ avec $D(t) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & t\end{pmatrix}$ et cette relation est aussi vraie pour $t = 1$.
En posant $Y = P^{-1}X$,

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow Y' = D(t)Y$$

En écrivant

$$Y(t) = \begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}$$

on a

$$Y' = D(t)Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = ty_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \lambda \mathrm{e}^t \\ y_2(t) = \mu \mathrm{e}^{t^2/2} \end{cases} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Puisque

$$X = PY = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

on obtient

$$X' = A(t)X \Leftrightarrow X(t) = \lambda\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\\mathrm{e}^t\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{t^2/2}\\2\mathrm{e}^{t^2/2}\end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 13 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène défini sur $\mathbb{R}$ d'équation matricielle $X' = A(t)X$ avec
$A(t) = \begin{pmatrix}t+3 & 2\\-4 & t-3\end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$.
$\chi_{A(t)} = X^2 - 2tX + (t^2-1)$, $\mathrm{Sp}(A) = \{t+1, t-1\}$.
$E_{t+1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $E_{t-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.
Pour $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}$ indépendante de t, $A(t) = PD(t)P^{-1}$ avec
$D(t) = \begin{pmatrix}t+1 & 0\\0 & t-1\end{pmatrix}$.
En posant $Y = P^{-1}X$, $X' = A(t)X \Leftrightarrow Y' = D(t)Y$.
En écrivant $Y(t) = \begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}$,
$Y' = D(t)Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = (t+1)y_1 \\ y_2' = (t-1)y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda \mathrm{e}^{(t^2+2t)/2} \\ y_2 = \mu \mathrm{e}^{(t^2-2t)/2} \end{cases}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
$X = PY = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$,
$X' = A(t)X \Leftrightarrow X(t) = \lambda\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{(t^2+2t)/2}\\-\mathrm{e}^{(t^2+2t)/2}\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{(t^2-2t)/2}\\-2\mathrm{e}^{(t^2-2t)/2}\end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 14 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 défini sur $\mathbb{R}$ d'équation matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ avec
$X' = A(t)X + B(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix}1+t & t\\-t & 1-t\end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix}-\mathrm{e}^t\\\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$.
Commençons par résoudre l'équation homogène $X' = A(t)X$.
$\chi_{A(t)} = (X-1)^2$.
$E_1(A(t)) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
Pour $P = \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$ indépendante de t, $A(t) = P^{-1}T(t)P$ avec
$T(t) = \begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}$.
En posant $Y = P^{-1}X$, $X' = A(t)X \Leftrightarrow Y' = T(t)Y$
En écrivant $Y = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, $Y' = T(t)Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + ty_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \mu\mathrm{e}^t + \dfrac{\lambda}{2}t^2\mathrm{e}^t \\ y_2 = \lambda\mathrm{e}^t \end{cases}$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
$X = PY = \begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$
$X' = A(t)X \Leftrightarrow X(t) = \lambda\begin{pmatrix}(t^2/2)\mathrm{e}^t\\(1-t^2/2)\mathrm{e}^t\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\\-\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$.
La famille (X_1, X_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène.
Cherchons une solution particulière.
$X(t) = \lambda(t)X_1(t) + \mu(t)X_2(t)$ avec λ et μ fonctions dérivables.

$X' = A(t)X + B(t) \Leftrightarrow \lambda'(t)\begin{pmatrix} (t^2/2)\mathrm{e}^t \\ (1-t^2/2)\mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \mu'(t)\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$

$\lambda(t) = 0$ et $\mu(t) = -t$ conviennent

$X(t) = \begin{pmatrix} -t\mathrm{e}^t \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ est solution particulière.

Solution générale : $X(t) = \lambda\begin{pmatrix} (t^2/2)\mathrm{e}^t \\ (1-t^2/2)\mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t\mathrm{e}^t \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$

Exercice 15 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle
$X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Sp}(A) = \{2, 3\}$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_3(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Pour $Y = P^{-1}X$, $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$

$Y' = DY \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{2t} \\ \mu \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \lambda\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{3t} \\ \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Exercice 16 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 d'équation matricielle
$X' = AX + B(t)$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{5, -3\}$, $E_5(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$ est solution de $Y' = DY + C(t)$ avec

$$C(t) = P^{-1}B(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-3t} \\ -\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

Après résolution, on obtient

$$Y' = DY + C(t) \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{5t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^t - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} \\ \mu \mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

puis

$$X' = AX + B(t) \Leftrightarrow X(t) = \lambda\begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{5t} \\ \mathrm{e}^{5t} \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -2\mathrm{e}^{-3t} \\ \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3t} \\ -\frac{1}{8}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}$$

On peut aussi procéder par variation des constantes après résolution séparée de l'équation homogène.

Exercice 17 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle
$X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2, 0\}$, $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Pour $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$.

$Y' = DY \Leftrightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{-t} \\ \mu \mathrm{e}^{2t} \\ \nu \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$.

$$X' = AX \Leftrightarrow X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}.$$

Exercice 18 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$\chi_A(X) = -X^2(X+1)$.
Après triangularisation, on a $A = PTP^{-1}$ pour

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $Y = P^{-1}X$, $X' = AX \Leftrightarrow Y' = TY$.

$$Y' = TY \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{-t} \\ \mu t + \nu \\ \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

La solution générale du système est donc

$$X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 2\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

Exercice 19 : [énoncé]
On complète u en une base orthonormée directe : (u, v, w). En notant a, b, c les composantes de x dans cette base on parvient au système

$$\begin{cases} a' = 0 \\ b' = -c \\ c' = b \end{cases}$$

qui équivaut encore à

$$\begin{cases} a' = 0 \\ c = -b' \\ c'' + c = 0 \end{cases}$$

On conclut

$$\begin{cases} a(t) = \nu \\ b(t) = \lambda \sin t - \mu \cos t \\ c(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t \end{cases}$$

Exercice 20 : [énoncé]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \chi_A = -(X-2)(X^2 - X + 1).$$

La résolution complexe est alors facile puisque la matrice A est diagonalisable.
La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la :
$X_1 = {}^t(1, 0, -1)$ est vecteur propre de A, complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.
Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de ${}^tA$.
$\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}A = \{2\}$ et $E_2({}^tA) = \mathrm{Vect}^t(2, 1, -1)$. Ainsi le plan d'équation $2x + y - z = 0$ est stable par ${}^tA$.
Prenons $X_2 = {}^t(0, 1, 1)$ et $X_3 = AX_2 = {}^t(-1, 2, 0)$. On vérifie $AX_3 = X_3 - X_2$.
Ainsi pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.
Pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) = P^{-1}X$, on a $X' = AX \Leftrightarrow Y' = BY$.
Ceci nous conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t} \\ y_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$

Et on peut conclure via $X = PY$.

Exercice 21 : [énoncé]
a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

convient.
b) On définit la matrice par :

```
A:=matrix(4,4,[0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,-1,2,-2,2]);
```

On obtient son polynôme caractéristique factorisé par

```
factor(charpoly(A,X));
```

et ses éléments propres par

```
eigenvects(A);
```

On constate que 1 est valeur propre double mais que le sous-espace propre associé est de dimension 1. La matrice A n'est donc pas diagonalisable.
c) Puisque $\chi_A = (X-1)^2(X-i)(X+i)$ est annulateur de A, il suffit d'appliquer le lemme de décomposition des noyaux.
d) Par l'étude des éléments propres précédents, on prend
$C_1 = {}^t\begin{pmatrix} -1 & -i & 1 & i \end{pmatrix}$, $C_2 = {}^t\begin{pmatrix} -1 & i & 1 & -i \end{pmatrix}$ et $C_3 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ vecteurs propres associées aux valeurs propres $i, -i$ et 1.
On détermine enfin une colonne C_4 vérifiant $AC_4 = C_4 + C_3$.

```
linsolve(A-diag(1,1,1,1),vector([1,1,1,1]));
```

On choisit parmi les solutions $C_4 = {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Finalement pour

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -i & i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ i & -i & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier l'exactitude

```
P:=matrix(4,4,[-1,-1,1,0,-I,I,1,1,1,1,1,2,I,-I,1,3]);
B:=evalm(inverse(P)&*A&*P);
```

e)

Les solutions de l'équation $X' = AX$ sont les fonctions $X(t) = \exp(tA)X(0)$.
$\exp(tA) = P^{-1}\exp(tB)P$ permet le calcul de$\exp(tA)$.
Sachant

$$B^n = \begin{pmatrix} i^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on a

$$\exp(tB) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{itb} & 0 & 0 & \\ 0 & \mathrm{e}^{-itb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

On achève le calcul de $\exp(tA)$ avec Maple

```
evalm(P&*matrix(4,4,[exp(I*t),0,0,0,0,exp(-I*t),0,0,0,0,exp(t),t*exp(t),0,0
```

Puis on détermine X

```
X:=evalm(%&*vector([x(0),D(x)(0),D(D(x))(0),(D@@3)(x)(0)]));
```

et enfin $x(t)$

```
X[1];
```

Exercice 22 : [énoncé]
$(t^2+1)y'' - 2y = 0$. $y_1(t) = t^2 + 1$ est solution sur $\mathbb{R}$.
Méthode de Lagrange : Cherchons une solution $y_2(t) = \lambda(t)y_1(t)$.
On obtient $\lambda''(t) + \frac{4t}{t^2+1}\lambda'(t) = 0$ qui donne $\lambda'(t) = \frac{C}{(t^2+1)^2}$.
$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + C$ et $\lambda(t) = \arctan t + \frac{t}{t^2+1}$ convient ce qui donne $y_2(t) = (t^2+1)\arctan t + t$.
Ainsi $\mathcal{S}_0 = \left\{t \mapsto \lambda(t^2+1) + \mu((t^2+1)\arctan t + t)/\lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.
$y(t) = -\frac{1}{2}t$ est solution particulière donc
$\mathcal{S} = \left\{t \mapsto \lambda(t^2+1) + \mu((t^2+1)\arctan t + t) - \frac{1}{2}t/\lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$

Exercice 23 : [énoncé]
Si y est un polynôme unitaire de degré n solution de l'équation homogène, le coefficient de t^{n+2} dans le premier membre de l'équation est :

$$n(n-1)-2n+2=n^2-3n+2=(n-2)(n-1)$$

et donc nécessairement $n\leqslant 2$.
Pour $y(t)=at^2+bt+c$, le premier membre de l'équation devient :

$$2a(1+t^2)^2-2t(2at+b)(1+t^2)+2(t^2-1)(at^2+bt+c)=(2c-2a)t^2-4bt+(2a-2c)$$

d'où $a=c$ et $b=0$
Finalement $y_1(t)=t^2+1$ est solution particulière.
En vertu de la méthode de Lagrange, résolvons l'équation complète en procédant au changement de fonction inconnue

$$y(t)=\lambda(t)y_1(t)$$

Soient $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\lambda(t)=\frac{y(t)}{1+t^2}$$

de sorte que $y(t)=\lambda(t)y_1(t)$. La fonction λ est deux fois dérivable.
Après calculs, on obtient que y est solution de l'équation différentielle étudiée si, et seulement si,

$$(1+t^2)^3\lambda''(t)+t(1+t^2)^2\lambda'(t)=(1+t^2)$$

Après résolution de cette équation d'ordre 1 en l'inconnue λ', on obtient

$$\lambda'(t)=\frac{\lambda+\arctan t}{(1+t^2)}$$

puis

$$\lambda(t)=\mu+\lambda\arctan t+\frac{1}{2}\left(\arctan t\right)^2$$

Finalement la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(t)=\lambda(1+t^2)\arctan t+\mu(1+t^2)+\frac{1}{2}(1+t^2)\left(\arctan t\right)^2$$

Exercice 24 : [énoncé]
En recherchant les fonctions polynomiales solutions on obtient : $y(t)=t$ solution particulière.
On pose $y(t)=tz(t)$ et on parvient à l'équation

$$t^4z''+t^2(2t+1)z'=0$$

$z(t)=\mathrm{e}^{1/t}$ puis $y(t)=t\mathrm{e}^{1/t}$ conviennent.
Solution générale

$$y(t)=\lambda t\mathrm{e}^{1/t}+\mu t$$

Exercice 25 : [énoncé]
Solution particulière $y(t)=-1$.
Résolvons l'équation homogène $t^2y''+ty'-y=0$.
En recherchant les fonctions polynomiales solutions on obtient : $y(t)=t$ solution particulière.
On pose $y(t)=tz(t)$ et on parvient à l'équation $t^3z''+3t^2z'=0$.
$z(t)=\frac{1}{t^2}$ puis $y(t)=\frac{1}{t}$ conviennent.
Solution générale homogène : $y(t)=\frac{\lambda}{t}+\mu t$
Solution générale : $y(t)=\frac{\lambda}{t}+\mu t-1$

Exercice 26 : [énoncé]
Soit y la somme de la série entière $\sum a_nx^n$ de rayon de convergence R supposé >0.
$x(1-x)y''+(1-3x)y'-y=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2(a_{n+1}-a_n)x^n$.
On en déduit $y(x)=\frac{1}{1-x}$ solution de l'équation étudiée.
On pose ensuite $y(x)=\frac{z(x)}{1-x}$ avec z deux fois dérivable.
On obtient $xz''+z'=0$. $z(x)=\ln(x)$ puis $y(x)=\frac{\ln x}{1-x}$ conviennent.
Solution générale sur $]0,1[$: $y(x)=\frac{\lambda\ln(x)+\mu}{1-x}$.

Exercice 27 : [énoncé]
Soit y la somme de la série entière $\sum a_nt^n$ de rayon de convergence R supposé >0.
$4(1-t^2)y''(t)-4ty'(t)+y(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(4(n+2)(n+1)a_{n+2}-(4n^2-1)a_n\right)t^n$ donc y est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$\forall n\in\mathbb{N},a_{n+2}=\frac{(n-1/2)(n+1/2)}{(n+1)(n+2)}a_n$$

donc $a_{2p}=\binom{1/2}{2p}a_0$ et $a_{2p+1}=\binom{1/2}{2p+1}a_1$.

Or personne, oh non personne, n'ignore que

$$\sqrt{1+t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}t^n \text{ et } \sqrt{1-t}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{1/2}{n}t^n$$

avec un rayon de convergence égal à 1.
En prenant $a_0=a_1=1$, on obtient la fonction $t\mapsto\sqrt{1+t}$.
En prenant $a_0=1$ et $a_1=-1$, on obtient $t\mapsto\sqrt{1-t}$.
Ces deux fonctions sont solutions de l'équation étudiée (car $R=1$) et, étant indépendantes, elles constituent un système fondamental de solutions. La solution générale s'exprime

$$y(t)=\lambda\sqrt{1+t}+\mu\sqrt{1-t}$$

Exercice 28 : [énoncé]
a) Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$ et de somme y_1 sur $]-R,R[$.
Pour tout $x\in\,]-R,R[$, on a

$$xy''(x)+3y'(x)-4x^3y(x)=3a_1+8a_2x+21a_3x^2+\sum_{n=3}^{+\infty}\left((n+1)(n+3)a_{n+1}-4a_{n-3}\right)x^n$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on peut affirmer que y est solution de E sur $]-R,R[$ si, et seulement si,

$$\begin{cases}a_1=a_2=a_3=0\\ \forall n\geqslant 3, a_{n+1}=\dfrac{4}{(n+1)(n+3)}a_{n-3}\end{cases}$$

Posons $a_0=1$ et pour tout $p\in\mathbb{N}^\star$, $a_{4p}=\frac{1}{2p(2p+1)}a_{4(p-1)}$, les autres a_n nuls.
Ainsi

$$a_{4p}=\frac{1}{(2p+1)!},a_{4p+1}=a_{4p+2}=a_{4p+3}=0$$

La série entière correspondante est de rayon de convergence $R=+\infty$ et sa somme

$$y_1:x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4p}}{(2p+1)!}$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle E en vertu des calculs qui précèdent.
Pour $x\neq 0$,

$$y_1(x)=\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^2)^{2p+1}}{(2p+1)!}=\frac{\mathrm{sh}(x^2)}{x^2}$$

b) En vertu de la méthode de Lagrange, on recherche y_2 de la forme

$$y_2(x)=\lambda(x)y_1(x)$$

avec λ fonction deux fois dérivable non constante.
Par calculs, on obtient que y_2 est solution de l'équation différentielle E si, et seulement si,

$$\lambda''(x)=\left(\frac{1}{x}-4x\frac{\mathrm{ch}(x^2)}{\mathrm{sh}(x^2)}\right)\lambda'(x)$$

Après résolution

$$\lambda'(x)=\frac{x}{\mathrm{sh}^2(x^2)}\text{ convient}$$

puis

$$\lambda(x)=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{ch}(x^2)}{\mathrm{sh}(x^2)}\text{ convient}$$

Finalement

$$y_2(x)=-\frac{\mathrm{ch}(x^2)}{2x^2}$$

est aussi une solution de E sur $]0,+\infty[$ et celle-ci n'est pas colinéaire à la précédente.
En jouant avec les facteurs multiplicatifs, on peut aussi prendre, et c'est plus élégant,

$$y_2(x)=\frac{\mathrm{ch}(x^2)}{x^2}$$

c) E est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène résolue en y'' sur $]0,+\infty[$.
Les solutions indépendantes y_1 et y_2 forment donc un système fondamental de solutions permettant d'exprimer la solution générale de E

$$y(x)=\frac{\lambda_1\mathrm{sh}(x^2)+\lambda_2\mathrm{ch}(x^2)}{x^2}$$

Exercice 29 : [énoncé]
Par l'absurde :
S'il existe y une solution sur $\mathbb{R}$ de $y''+p(x)y=0$ qui ne s'annule pas.
Deux cas sont possibles : y est positive ou y est négative.
Si y est positive alors $y''\leqslant 0$.
La fonction y est donc concave et sa courbe représentative est en dessous de chacune de ses tangentes.
Si y possède une tangente de pente non nulle, y prend des valeurs négatives, exclu.

Par suite y est nécessairement constante et alors $y'' = 0$ puis $p(x)y(x) = 0$ implique que y est constante égale à 0. Absurde.
Si y est négative, le même raisonnement permet de conclure.

Exercice 30 : [énoncé]
a) Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
La fonction S est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle
Sur $]-R, R[$,

$$S''(x) + 2xS'(x) + 2S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n)x^n$$

Par conséquent, S est solution de l'équation différentielle

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = \frac{-2}{n+2}a_n$$

ce qui donne

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{p!}a_0 \text{ et } a_{2p+1} = \frac{(-1)^p 2^p}{(2p+1)\ldots 3}a_1 = \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}a_1$$

Synthèse : Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment proposés.
Une telle série entière est de rayon de convergence $R = +\infty$ car $a_{2p} = O(1/p!)$ et $a_{2p+1} = O(4^p/p!)$.
De plus par les calculs ci-dessus elle est solution de l'équation différentielle proposée sur $\mathbb{R}$.
b) Les solutions paires sont obtenue pour $a_{2p+1} = 0$. Cela donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = a_0 \mathrm{e}^{-x^2}$$

Exercice 31 : [énoncé]
a) Soit $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une série entière solution de rayon de convergence $R > 0$.

Sur $]-R, R[$, on a $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, $y'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$ et
$y''(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}$ donc
$(1+t^2)y''(t) + 4t\,y'(t) + 2y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)(a_{n+2} + a_n)t^n$
Pour $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -a_n$ i.e. $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = (-1)^p a_0$ et $a_{2p+1} = (-1)^p a_1$.
on obtient $y(t) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p+1} = \frac{a_0 + a_1 t}{1+t^2}$ solution. Cela fournit un système fondamental de solutions sur $]-1, 1[$, il suffit alors de les réinjecter dans l'équation pour affirmer que ces fonctions forment un système fondamental de solution sur $\mathbb{R}$.
Puisque l'espace des solutions de cette équation homogène est de dimension 2, on conclut.
b) La méthode de variation des constantes donne
$y(t) = \frac{\lambda(t) + \mu(t)t}{1+t^2}$ avec $\lambda'(t) = -t$ et $\mu'(t) = 1$ puis $y(t) = \frac{t^2}{2(1+t^2)}$.

Exercice 32 : [énoncé]
a) Si $n = 1$ alors l'équation a pour solution générale

$$y(t) = A\cos t + B\sin t + \frac{1}{2}t\sin t$$

Si $n \neq 1$ alors l'équation a pour solution générale

$$y(t) = A\cos t + B\sin t + \frac{1}{1-n^2}\cos(nt)$$

b) Soit

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1}{2}t\sin t + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt)$$

Sans difficultés, on peut dériver deux fois sous le signe somme car il y a convergence normale de la série des dérivées secondes et convergence simple intermédiaire. On peut alors conclure que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle étudiée. La solution générale de celle-ci est alors

$$y(t) = A\cos t + B\sin t + f(t)$$

Exercice 33 : [énoncé]
L'espace des solutions est de dimension 2. $y(x) = x$ est solution immédiate. Par la méthode de Lagrange (et quelques déterminations de primitives non triviales) on obtient aussi $y(x) = \sqrt{x^2+1}$ ce qui fournit un système fondamental de solutions

Exercice 34 : [énoncé]
Soit f solution. $f''(x) = (f(1/x))' = -\frac{1}{x^2}f'(1/x)$ donc $x^2f''(x) + f(x) = 0$.
Résolvons l'équation $E : x^2y'' + y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
E est une équation différentielle d'Euler. Réalisons le changement de variable $t = \ln x$.
Soit $y : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$.
z est deux fois dérivable et $y(x) = z(\ln x)$, $y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x)$,
$y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)$.
y est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de E si, et seulement si, z est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$F : z'' - z' + z = 0$$

F est un équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène de solution générale :

$$z(x) = (\lambda \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin\frac{\sqrt{3}x}{2})\mathrm{e}^{x/2}$$

La solution générale de E sur $\mathbb{R}^{+\star}$ est

$$y(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$

Revenons à fn il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$

On a alors

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left((\lambda + \mu\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + (\mu - \lambda\sqrt{3})\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$

et donc

$$f'(x) = f(1/x) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu\sqrt{3} = 2\lambda \\ \lambda\sqrt{3} - \mu = 2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu\sqrt{3}$$

Finalement, les solutions sont les fonctions f données par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Exercice 35 : [énoncé]
a) Par l'absurde supposons que g possède un zéro non isolé a. Il existe alors une suite (x_n) de zéros de g distincts de a convergeant vers a. Puisque $g(x_n) = 0$, à la limite $g(a) = 0$. Puisque

$$g'(a) = \lim_{x\to a, x\neq a}\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

on a aussi

$$g'(a) = \lim_{n\to+\infty}\frac{g(x_n) - g(a)}{x_n - a} = 0$$

Ainsi $g(a) = g'(a) = 0$ et donc g est la fonction nulle car cette dernière est l'unique solution de l'équation linéaire d'ordre 2 E vérifiant les conditions initiales $y(a) = y'(a) = 0$.
b) Posons

$$\varphi(x) = (x_2 - x)\int_{x_1}^{x}(t - x_1)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + (x - x_1)\int_{x}^{x_2}(x_2 - t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(x) = -\int_{x_1}^{x}(t - x_1)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x}^{x_2}(x_2 - t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction φ est donc deux fois dérivable et

$$\varphi''(x) = (x_1 - x_2)f(x)g(x)$$

Puisque g est solution de l'équation E, on obtient

$$\varphi''(x) = (x_2 - x_1)g''(x)$$

et donc

$$\varphi(x) = (x_2 - x_1)g(x) + \alpha x + \beta$$

Or les fonctions φ et g s'annulent toutes deux en x_1 etx_2 donc $\alpha = \beta = 0$ puis

$$\varphi(x) = (x_2 - x_1)g(x)$$

c) Soit $\alpha = \max\limits_{[x_1,x_2]}|g| \neq 0$. Pour x tel que $|g(x)| = \alpha$, la relation précédente donne

$$\alpha(x_2 - x_1) \leqslant (x_2 - x)\left|\int_{x_1}^{x}(t - x_1)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| + (x - x_1)\left|\int_{x}^{x_2}(x_2 - t)f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

puis

$$\alpha(x_2-x_1) \leqslant \alpha(x_2-x)(x-x_1)\int_{x_1}^{x} |f(t)|\,\mathrm{d}t+\alpha(x_2-x)(x-x_1)\int_{x}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \alpha(x_2-x)(x-x_1)\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

On en déduit

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{4}{x_2-x_1}$$

car

$$(x_2-x)(x_1-x) \leqslant \frac{(x_2-x_1)^2}{4}$$

Exercice 36 : [énoncé]

a) Puisque f n'est pas la fonction nulle, on peut affirmer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$(f(t), f'(t)) \neq (0,0)$$

En effet, seule la fonction nulle est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y(t_0) = y'(t_0) = 0 \\ y'' + qy = 0 \end{cases}$$

Posons alors $p(t) = \sqrt{f(t)^2 + f'(t)^2}$ ce qui définit une fonction $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs strictement positives.

Puisque $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{p(t)}, \frac{f'(t)}{p(t)}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et prend ses valeurs dans le cercle unité, on peut affirmer par le théorème de relèvement qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\frac{f(t)}{p(t)} = \cos g(t) \text{ et } \frac{f'(t)}{p(t)} = \sin g(t)$$

b) D'une part $f' = p\sin g$ et d'autre part $f' = (p\cos g)' = p'\cos g - g'p\sin g$.

De même $f'' = p'\sin g + g'p\cos g$ et $f'' = -qf = -qp\cos g$.

On en déduit le système

$$\begin{cases} p'\cos g - g'p\sin g = p\sin g \\ p'\sin g + g'p\cos g = -qp\cos g \end{cases}$$

Par combinaison d'équations, on obtient

$$g'p = -qp$$

puis

$$g' = -q$$

c) Puisque la dérivée de g est strictement négative, on peut affirmer que g réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme décroissant de $\mathbb{R}^+$ vers $g(\mathbb{R}^+)$.

d) Puisque $q(t) \geqslant m$, on a $g'(t) \leqslant -m$ puis

$$g(t) \leqslant -mt + g(0)$$

On en déduit que g tend vers $-\infty$ quand t croît vers $+\infty$ et par suite

$$g(\mathbb{R}^+) = \left]-\infty, g(0)\right]$$

Il existe donc une infinité de valeurs de t telles que

$$g(t) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

et pour ses valeurs $f(t) = 0$.

Exercice 37 : [énoncé]

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. En résolvant sur I l'équation différentielle

$$xy'(x) = \lambda y(x)$$

on obtient que $x \mapsto x^\lambda$ est une fonction propre de l'application φ. Pour une telle fonction, on a

$$xy'(x) = \lambda y(x)$$

donc en dérivant

$$xy''(x) + y'(x) - \lambda y'(x) = 0$$

puis

$$x^2y''(x) + xy'(x) - \lambda^2 y(x) = 0$$

On en déduit que les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{-\alpha}$ sont solutions sur I de l'équation différentielle E_α. Or cette équation est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène résolue en y'', son ensemble solution est donc un plan vectoriel. Puisque les deux précédentes fonctions sont des solutions indépendantes, elles constituent une base de ce plan vectoriel.

La solution générale de E_α est donc

$$y(x) = \lambda x^\alpha + \mu x^{-\alpha} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Exercice 38 : [énoncé]
Par dérivation d'un déterminant, $w'(t) = \begin{vmatrix} f_1'(t) & f_2'(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) \end{vmatrix}$ donc
$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ -a(t)f_1'(t) - b(t)f_1(t) & -a(t)f_2'(t) - b(t)f_2(t) \end{vmatrix}$ puis
$w'(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ -a(t)f_1'(t) & -a(t)f_2'(t) \end{vmatrix} = -a(t)\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix}$. Ainsi w est solution de l'équation différentielle $w' + a(t)w = 0$.

Exercice 39 : [énoncé]
a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t = f'(0) - \int_0^x q(t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque la fonction q est intégrable sur $[0, +\infty[$ et puisque f est bornée, on peut affirmer que la fonction qf est intégrable sur $[0, +\infty[$. Par suite l'intégrale de l'expression précédente de $f'(x)$ converge quand $x \to +\infty$. On en déduit que f' converge en $+\infty$.
Posons ℓ sa limite.
Si $\ell > 0$ alors il existe A assez grand tel que pour tout $x \geqslant A$ on a $f'(x) \geqslant \ell/2$.
On a alors

$$f(x) = f(A) + \int_A^x f'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(A) + \frac{\ell}{2}(x - A) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui contredit l'hypothèse f bornée.
De même, $\ell < 0$ est absurde et il reste donc $\ell = 0$.
b) En dérivant

$$w' = f''g + f'g' - f'g' - f''g = 0$$

car f et g sont solutions de E.
On en déduit que le wronskien w est constant et puisque les fonctions f et g sont bornées, leurs dérivées f' et g' convergent vers 0 en $+\infty$ et donc $w \xrightarrow[+\infty]{} 0$.
Ainsi le wronskien w est constant égal à 0 et donc les fonctions f et g sont liées.
On en déduit que l'équation différentielle E possède une solution non bornée.

Exercice 40 : [énoncé]
L'équation E_0 est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène.
a) y^2 est deux fois dérivable et

$$(y^2)''(x) = 2y(x)y''(x) + 2\left(y'(x)\right)^2 = 2\mathrm{e}^x\left(y(x)\right)^2 + 2\left(y'(x)\right)^2 \geqslant 0$$

Par suite la fonction y^2 est convexe.
Si $y(0) = y(1) = 0$ alors, sachant que y^2 est convexe, le graphe de y^2 est en dessous de chacune de ses cordes et donc y^2 est nulle sur $[0, 1]$. On en déduit que y est nulle sur $[0, 1]$ et en particulier $y(0) = y'(0) = 0$. Or la fonction nulle est la seule solution de l'équation différentielle E_0 vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. On en déduit que la fonction y est nulle sur $\mathbb{R}$.
b) Le wronskien en 0 des solutions y_1, y_2 est

$$w(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = y_2(0)$$

Si $y_2(0) = 0$ alors, sachant $y_2(1) = 0$, le résultat qui précède entraîne $y_2 = \tilde{0}$. Or $y_2'(1) = 1 \neq 0$. C'est impossible et donc $w(0) = y_2(0) \neq 0$.
On en déduit que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions de E_0.
Notons que l'on démontre par le même argument que $y_1(1) \neq 0$.
c) Soit $\tilde{y}$ une solution particulière de l'équation E.
La solution générale de E est de la forme $y(x) = \tilde{y}(x) + \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x)$.
Cette solution vérifie $y(0) = y(1) = 0$ si, et seulement si,

$$\tilde{y}(0) + \lambda_2 y_2(0) = 0 \text{ et } \tilde{y}(1) + \lambda_1 y_1(1) = 0$$

Ces deux équations déterminent λ_1 et λ_2 de façon unique puisque $y_1(1), y_2(0) \neq 0$.

Exercice 41 : [énoncé]
$W(t) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ donc par dérivation d'une application multilinéaire
$W'(t) = \sum\limits_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_i'(t), \ldots, \varphi_n(t))$ puis
$W'(t) = \sum\limits_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \ldots, a(t)\varphi_i(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Introduisons
$M(t) = \mathrm{Mat}_{(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))}(a(t)) = (m_{i,j}(t))$. On a
$W'(t) = \sum\limits_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \ldots, \sum\limits_{j=1}^n m_{i,j}(t)\varphi_j(t), \ldots, \varphi_n(t))$ puis par le caractère multilinéaire alterné du déterminant :
$W'(t) = \sum\limits_{i=1}^n m_{i,i}(t)\det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_i(t), \ldots, \varphi_n(t)) = \mathrm{tr}(a(t))W(t)$. $t \mapsto W(t)$ est ainsi solution d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 dont la résolution conduit à l'expression proposée.

Exercice 42 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène :
$y(t) = (\lambda t + \mu)\mathrm{e}^{-2t}$.

Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)te^{-2t} + \mu(t)e^{-2t}$ avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda'(t)te^{-2t} + \mu'(t)e^{-2t} = 0 \\ \lambda'(t)(1-2t)e^{-2t} - 2\mu'(t)e^{-2t} = \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2} \end{cases}$$

donne

$$\begin{cases} \lambda'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \mu'(t) = \dfrac{-t}{1+t^2} \end{cases}$$

$\lambda(t) = \arctan t$ et $\mu(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ conviennent.
Finalement la solution générale des l'équation étudiée est :

$$y(t) = t\arctan(t)e^{-2t} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)e^{-2t} + (\lambda t + \mu)e^{-2t}$$

Exercice 43 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène :
$y = \lambda\cos t + \mu\sin t$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.
$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = \tan t \end{cases}$, $\begin{cases} \lambda'(t) = -\sin^2 t/\cos t \\ \mu'(t) = \sin t \end{cases}$,
$\lambda(t) = \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t}dt = \sin t - \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$ et $\mu(t) = -\cos t$ conviennent car
$\int \frac{1}{\cos t}dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$.
Finalement la solution générale de l'équation étudiée est :
$y(t) = -\frac{1}{2}\cos t\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \lambda\cos t + \mu\sin t$ sur $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Exercice 44 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y = \lambda\cos t + \mu\sin t$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.
$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = \tan^2 t \end{cases}$, $\begin{cases} \lambda'(t) = -\sin^3 t/\cos^2 t \\ \mu'(t) = \sin^2 t/\cos t \end{cases}$,
$\lambda(t) = -\frac{1}{\cos t} - \cos t$ et $\mu(t) = \int \frac{1-\cos^2 t}{\cos t}dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \sin t$ conviennent car
$\int \frac{1}{\cos t}dt = \int \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}$.
Finalement la solution générale de l'équation étudiée est :
$y(t) = -2 + \frac{1}{2}\sin t\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \lambda\cos t + \mu\sin t$ sur $I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Exercice 45 : [énoncé]
a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y = \lambda\cos t + \mu\sin t$.
Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme $y(t) = \lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$ avec λ, μ fonctions dérivables.
$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = f(t) \end{cases}$,
$\cos t \times (1) - \sin t \times (2)$ donne $\lambda'(t) = -f(t)\sin t$.
$\sin t \times (1) + \cos(t) \times (2)$ donne $\mu'(t) = f(t)\cos t$.
Choisissons $\lambda(t) = \int_0^t -f(u)\sin u\,du$ et $\mu(t) = \int_0^t f(u)\cos u\,du$
ce qui donne la solution particulière :
$y(t) = \int_0^t f(u)(\sin t\cos u - \sin u\cos t)\,du = \int_0^t f(u)\sin(t-u)\,du$.
La solution générale de l'équation est
$y(t) = \int_0^t f(u)\sin(t-u)du + \lambda\cos(t) + \mu\sin(t)$.
b) $y(0) = 0$ donne $\lambda = 0$.
Avec les notations précédentes :
$y'(t) = -\lambda(t)\sin t + \mu(t)\cos t - \lambda\sin t + \mu\cos t$
donc $y'(0) = \mu(0) + \mu = \mu$ puis $\mu = 0$.
Finalement : $y(t) = \int_0^t f(u)\sin(t-u)\,du$.

Exercice 46 : [énoncé]
Posons $g = f + f''$. f est évidemment solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = g$$

Après application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de cette équation est

$$y(x) = a\cos x + b\sin x + \int_0^x g(t)\sin(x-t)\,dt$$

Pour une telle solution,

$$y(x+\pi) + y(x) = \int_x^{x+\pi} g(t)\sin(x+\pi-t)\,dt \geqslant 0$$

Ainsi f vérifie

$$f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$$

Exercice 47 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y = A\cos x + B\sin x$.
Méthode de variation des constantes : $\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \text{cotan} x \end{cases}$.
Après résolution et intégration $y(x) = -\frac{1}{2}\sin x \ln \frac{1+\cos x}{1-\cos x} + A\cos x + B\sin x$.

Exercice 48 : [énoncé]
a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y = A\cos x + B\sin x$.
Méthode de variation des constantes :

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 1/x \end{cases}, \begin{cases} A'(x) = -\sin x/x \\ B'(x) = \cos x/x \end{cases}$$

$A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $B(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ conviennent (et ont le bon goût de converger).
Solution générale :

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

b) Par domination par $\frac{1}{1+t^2}$, on obtient f continue sur $\mathbb{R}^+$ et par domination par e^{-at} sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, on obtient f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ avec

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

de sorte que f est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de $y'' + y = \frac{1}{x}$.
Ainsi, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = A\cos x + B\sin x + \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On observe

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

donc $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$ puis $A = B = 0$.
Ainsi

$$f(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

c) Quand $x \to 0^+$

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x$$

donc

$$\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \to 0$$

Ainsi en passant à la limite l'expression précédente de $f(x)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = f(0) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 49 : [énoncé]
Les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ car f l'est.
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Cette solution est 2π-périodique si, et seulement si,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$$

i.e. $\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
En développant le sinus et en exploitant la liberté de la famille $(\sin, \cos)$ ainsi que la 2π-périodicité de f, cela équivaut à la condition

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0$$

Exercice 50 : [énoncé]
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x - t)\,\mathrm{d}t$$

Pour conclure, il suffit de justifier que $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$ est bornée.
Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0)\cos x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$$

Quitte à passer à l'opposé, on peut supposer f croissante et donc $f'(t) \geqslant 0$.
Puisque $-1 \leqslant \cos(x-t) \leqslant 1$,

$$f(0) - f(x) \leqslant \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) - f(0)$$

puis

$$f(0)(1-\cos x) \leqslant \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2f(x) - f(0)(1+\cos x)$$

La fonction f étant bornée (car convergente en $+\infty$), il en est de même de $x \mapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 51 : [énoncé]
Soient y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $z : I = \left]-\pi/2, \pi/2\right[\to \mathbb{R}$ définie par $z(x) = y(\tan x)$.
z est deux fois dérivable et $\forall t \in \mathbb{R}, y(t) = z(\arctan t)$.
$y'(t) = \frac{z'(\arctan t)}{1+t^2}$ et $y''(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} z'(\arctan t) + \frac{1}{(1+t^2)^2} z''(\arctan t)$.
y est solution si, et seulement si,

$$z''(\arctan t) + z(\arctan t) = t$$

soit $z''(x) + z(x) = \tan x$ sur I.
$z'' + z = 0$ donc $z = \lambda \cos x + \mu \sin x$.
Méthode de la variation des constantes : $\lambda'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ et $\mu'(x) = \sin x$.

$$\int -\frac{\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \underset{u=\sin x}{=} \int \frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u = u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C = \sin x + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x} + C$$

Prenons $\lambda(x) = \sin x + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ et $\mu(x) = -\cos x$.
On obtient : $z(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cos x$ solution particulière.
Finalement

$$y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}\ln\frac{\sqrt{1+t^2}-t}{\sqrt{1+t^2}+t}$$

Exercice 52 : [énoncé]
L'équation étudiée est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur $]-1, 1[$ d'équation homogène

$$(1-x^2)y'' - 3xy'' - y = 0$$

On vérifie par le calcul que la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

est solution de cette équation homogène et qu'elle ne s'annule pas.
Par la méthode de Lagrange, on cherche une deuxième solution indépendante de la forme

$$\psi : x \mapsto \lambda(x)\varphi(x) \text{ avec } \lambda \text{ fonction deux fois dérivable}$$

On parvient à l'équation

$$\lambda''(x) = \frac{x}{1-x^2}\lambda'(x)$$

La fonction $\lambda : x \mapsto \arcsin x$ convient ce qui donne

$$\psi : x \mapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Pour trouver une solution particulière de l'équation complète, on applique la méthode de variation des constantes et on cherche cette solution de la forme

$$y(x) = \lambda(x)\varphi(x) + \mu(x)\psi(x)$$

avec λ, μ fonctions dérivables vérifiant

$$\lambda'(x)\varphi(x) + \mu'(x)\psi(x) = 0$$

On parvient au système

$$\begin{cases} \lambda'(x)\varphi(x) + \mu'(x)\psi(x) = 0 \\ \lambda'(x)\varphi'(x) + \mu'(x)\psi'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

Après résolution

$$\lambda(x) = -\sqrt{1-x^2} \text{ et } \mu(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x - x \text{ conviennent}$$

et donc

$$y(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

est solution particulière.
Finalement la solution générale est

$$y(x) = \frac{\lambda + \mu\arcsin x - x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 53 : [énoncé]
Sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$, $E \Leftrightarrow y' = \frac{1}{x^2}y$. Solution générale : $y(x) = C\mathrm{e}^{-1/x}$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$.
y est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$ donc il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telles que :
$\forall x > 0, y(x) = C^+\mathrm{e}^{-1/x}$ et $\forall x < 0, y(x) = C^-\mathrm{e}^{-1/x}$.
Continuité en 0 : $y(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$ et $y(x) \xrightarrow[x\to 0-]{} \begin{cases} \pm\infty \text{ si } C^- \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
Nécessairement $y(0) = 0$ et $C^- = 0$.
Dérivabilité en 0 : $y'(x) = -\frac{C^+}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x} \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$ et $y'(x) \xrightarrow[x\to 0-]{} 0$ donc $y'(0) = 0$.
Equation différentielle en 0 : $0^2y'(0) - y(0) = 0$: ok.
Finalement, $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.
Inversement une telle fonction est solution.

Exercice 54 : [énoncé]
a) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$: $y(x) = x\ln|x| + Cx$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Pas de recollement possible en 0.
b) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$: $y(x) = 1 + \frac{C}{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(x) = 1$.
c) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$: $y(x) = \frac{1}{2}x^4 + Cx^2$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(x) = \begin{cases} C^+x^2 + \dfrac{1}{4}x^4 \text{ si } x \geqslant 0 \\ C^-x^2 + \dfrac{1}{4}x^4 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
avec $C^+, C^- \in \mathbb{R}$.

d) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$: $y(x) = \frac{1}{x} + C\frac{x^2+1}{x}$ avec $C \in \mathbb{R}$ via $\frac{x^2-1}{x(1+x^2)} = \frac{2x^2-(1+x^2)}{x(1+x^2)} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{1}{x}$.
Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(x) = -x$.

Exercice 55 : [énoncé]
a) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$: $y(x) = C\operatorname{sh}x - \operatorname{ch}x$.
Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(x) = C\operatorname{sh}x - \operatorname{ch}x$ avec $C \in \mathbb{R}$.
b) Solution générale sur $\mathbb{R}^{+\star}$ ou $\mathbb{R}^{-\star}$: $y(x) = \frac{C+x}{\mathrm{e}^x - 1}$.
Après recollement en 0, solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}$ prolongée par $y(0) = 1$.

Exercice 56 : [énoncé]
a) Solution générale sur $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{R}$: $y(x) = \cos x + C\sin x$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Après recollement en chaque $k\pi$, solution générale sur $\mathbb{R}$: $y(x) = \cos x + C\sin x$ avec $C \in \mathbb{R}$.
b)) Solution générale sur $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{R}$: $y(x) = C\mathrm{e}^{1/\sin^2 x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Après recollement en chaque $k\pi$, solution générale sur $\mathbb{R}$:
$y(x) = \begin{cases} C_k\mathrm{e}^{1/\sin^2 x} \text{ si } x \in I_k \\ 0 \text{ si } x = k\pi \end{cases}$ avec $(C_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

Exercice 57 : [énoncé]
a) Soit $I =]-\pi/2, \pi/2[$ le plus grand intervalle contenant où l'équation différentielle a un sens.
Posons $I^+ =]0, \pi/2[$ et $I^- =]-\pi/2, 0[$.
Solution générale sur I^+ : $y(x) = C^+\sin x$.
Solution générale sur I^- : $y(x) = C^-\sin x$.
Cherchons les solutions définies sur I.
Analyse : Soit y une solution sur I, s'il en existe.
y est a fortiori solution sur I^+ et I^- donc :
$\exists C^+, C^- \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = C^+\sin x$ sur I^+ et $y(x) = C^-\sin x$ sur I^-.
Comme y doit être continue en 0, $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = \lim\limits_{x\to 0-} y(x) = y(0) = 0$. Pas d'informations sur C^+ ni C^-.
Comme y doit être dérivable en 0,
$\lim\limits_{x\to 0+} \frac{y(x)-y(0)}{x} = C^+ = y'(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{y(x)-y(0)}{x} = C^-$.
Donc $C^+ = C^-$. Finalement $y(x) = C^+\sin x$ sur I entier.
Synthèse : $y(x) = C\sin(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$ est bien solution sur I.

On aura $y(0) = 0 \Leftrightarrow C.\sin(0) = 0$ ce qui est toujours vraie.
Il y a ici une infinité de solutions au problème de Cauchy.
b) On aura $y(0) = 1 \Leftrightarrow C.\sin(0) = 1$ ce qui est impossible.
Il n'y a ici aucune solution au problème de Cauchy.

Exercice 58 : [énoncé]
Soit $I =]-\infty, -1[\,,]-1, 0[\,,]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.
Sur I, l'équation différentielle devient : $y' + \frac{2}{x(x^2-1)}y = \frac{x}{x^2-1}$.
La solution générale sur I est $\frac{x^2(\ln|x|+C)}{x^2-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Après recollement en 1, 0 et -1 on conclut, pour tout intervalle I :
Si $1, 0, -1 \notin I, y(x) = \frac{x^2(\ln|x|+C)}{x^2-1}$ avec $C \in \mathbb{R}$
Si $1, -1 \notin I$ et $0 \in I$, $y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2\ln|x| + C^+x^2}{x^2-1} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ \dfrac{x^2\ln|x| + C^-x^2}{x^2-1} \text{ si } x < 0 \end{cases}$ avec $C^+, C^- \in \mathbb{R}$.
Si $1 \in I$ ou $-1 \in I$, $y(x) = \frac{x^2\ln|x|}{x^2-1}$.

Exercice 59 : [énoncé]
Sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$: $y(x) = C\,|x|^\alpha$.
Soit y une solution sur $\mathbb{R}$.
On a $y(x) = C^+x^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $y(x) = C^-\,|x|^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{-\star}$.
Si $\alpha < 0$, la limite en 0 implique $C^+ = C^- = 0$ donc $y = 0$. Inversement ok.
Si $\alpha = 0$, la limite en 0 donne $C^+ = C^-$ et on conclut que y est constante.
Inversement ok.
Si $\alpha > 0$, la limite en 0 donne $y(0) = 0$.
On a $y'(x) = \alpha C^+x^{\alpha-1}$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $y(x) = -\alpha C^-\,|x|^\alpha$ sur $\mathbb{R}^{-\star}$.
Si $\alpha < 1$, la limite en 0 implique $C^+ = C^- = 0$ donc $y = 0$. Inversement ok.
Si $\alpha = 1$, la limite en 0 implique $C^+ = -C^-$ et on conclut que y est linéaire.
Inversement ok.
Si $\alpha > 1$, la limite en 0 existe et est nulle ce qui permet d'affirmer $y'(0) = 0$
L'équation différentielle est bien vérifiée en 0.
Inversement, lorsque $\alpha > 1$, la fonction définie par $y(x) = \begin{cases} C^+x^\alpha \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ C^-(-x)^\alpha \text{ si } x < 0 \end{cases}$ est solution.

Exercice 60 : [énoncé]
a) $z : x \mapsto y(-x)$ est deux fois dérivable sur I' et vérifie bien l'équation.
b) Soient y une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et z définie par $z(t) = y(\sqrt{t})$ de sorte que $y(x) = z(x^2)$. z est deux fois dérivable.
On a $y'(x) = 2xz'(x^2)$ et $y''(x) = 2z'(x^2) + 4x^2z''(x^2)$.
y est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ si, et seulement si,

$$4z'' - z = 0$$

Cela donne

$$y(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}} + \mu e^{-\frac{x^2}{2}}$$

c) Soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée.
Puisque y est solution sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et $\mathbb{R}^{-\star}$ on peut écrire :
$\forall x > 0, y(x) = \lambda_1 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$ et $\forall x < 0, y(x) = \lambda_2 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_2 e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Puisque y est continue en 0 : $\lambda_1 + \mu_1 = \lambda_2 + \mu_2$.
y' est continue en 0 ne donne rien.
$y''(x) \underset{x\to 0+}{\to} \lambda_1 - \mu_1$ et $y''(x) \underset{x\to 0-}{\to} \lambda_2 - \mu_2$.
Donc $y''(0) = \lambda_1 - \mu_1 = \lambda_2 - \mu_2$ d'où $\lambda_1 = \mu_1$ et $\lambda_2 = \mu_2$.
Finalement $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \lambda_1 e^{\frac{x^2}{2}} + \mu_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$.
Inversement, une telle fonction est solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 61 : [énoncé]
Sur $I =]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$ l'espace des solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est un plan vectoriel. En recherchant ses solutions polynomiale on obtient les fonctions $y(t) = a(t^2-1) + b(t+1)$. Les deux fonctions polynomiales $t \mapsto t^2 - 1$ et $t \mapsto t + 1$ sont solutions et indépendantes, elles constituent un système fondamental de solution de l'équation sur I. Reste à recoller celles-ci en -1.
Si y est solution sur $\mathbb{R}$, elle est a fortiori solution sur $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$ donc il existe $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall t > -1, y(t) = a_1(t^2-1) + b_1(t+1)$ et $\forall t < -1, y(t) = a_2(t^2-1) + b_2(t+1)$.
Recherchons parmi les fonctions de la forme précédente celles pouvant être prolongée en une fonction deux fois dérivable en -1
Limite en -1 : $\lim\limits_{t\to -1^+} y(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to -1^-} y(t) = 0$. On peut prolonger y en -1 en posant $y(-1) = 0$.
$\forall t > -1, y'(t) = 2a_1t + b_1$ et $\forall t > -1, y'(t) = 2a_2t + b_2$.
Limite en -1 : $\lim\limits_{t\to -1^+} y'(t) = -2a_1 + b_1$ et $\lim\limits_{t\to -1^-} y(t) = -2a_2 + b_2$. La fonction y est dérivable en -1 si, et seulement si, $-2a_1 + b_1 = -2a_2 + b_2$. Si tel est le cas :
$\forall t > -1, y''(t) = 2a_1$ et $\forall t < -1, y''(t) = 2a_2$.

Limite en -1 : $\lim_{t\to -1^+} y''(t) = 2a_1$ et $\lim_{t\to -1^-} y''(t) = 2a_2$. La fonction y est deux fois dérivable en -1 si, et seulement si, $2a_1 = 2a_2$.
Au final y peut être prolongée en une fonction deux fois dérivable si, et seulement si, $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.
La fonction y est alors donnée par $y(t) = a_1(t^2-1) + b_1(t+1)$ sur $\mathbb{R}$ et elle bien solution de l'équation.
Finalement les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions

$$y(t) = a(t^2-1) + b(t+1) \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Exercice 62 : [énoncé]
On remarque $(t+1)y'' - (t+2)y' + y = 0 \Leftrightarrow (t+1)(y'-y)' - (y'-y) = 0$.
Les fonctions $y(t) = \mathrm{e}^t$ et $y(t) = t+2$ sont solutions sur $\mathbb{R}$.
Par suite, sur $I =]-\infty, -1[$ ou $]-1, +\infty[$, la solution générale est
$y(t) = \lambda \mathrm{e}^t + \mu(t+2)$ car on sait que l'espace des solutions est de dimension 2.
Après recollement en -1, la solution générale sur $\mathbb{R}$ est $y(t) = \lambda \mathrm{e}^t + \mu(t+2)$.

Exercice 63 : [énoncé]
Sur $\mathbb{R}^+$, $E \Leftrightarrow y' + y = x$ de solution générale $y(x) = C\mathrm{e}^{-x} + x - 1$.
Sur $\mathbb{R}^-$, $E \Leftrightarrow y' + y = 0$ de solution générale $y(x) = C\mathrm{e}^{-x}$.
Soit y solution de E sur $\mathbb{R}$.
Comme y est solution sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$, il existe $C^+, C^- \in \mathbb{R}$ telle que :
$\forall x \geqslant 0, y(x) = C^+\mathrm{e}^{-x} + x - 1$ et $\forall x \leqslant 0, y(x) = C^-\mathrm{e}^{-x}$.
Définition en 0 : $y(0) = C^+ - 1 = C^-$ donc $C^+ = C^- + 1$.
Dérivabilité en 0 : $y'(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} -C^+ + 1$ et $y'(x) \xrightarrow[x\to 0-]{} -C^-$
donc $y'(0) = -C^+ + 1 = -C^-$.
Equation différentielle en 0 : $-C^+ + 1 + C^+ - 1 = \max(0,0)$: ok
Finalement, $\exists C \in \mathbb{R}$ telle que $y(x) = \begin{cases} C^+\mathrm{e}^{-x} + x - 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ (C^+ - 1)\mathrm{e}^{-x} \text{ sinon} \end{cases}$.

Exercice 64 : [énoncé]
a) Sur I_1, I_2 ou I_3, l'équation H est équivalente à l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène

$$y' + \frac{x-2}{x(x-4)}y = 0$$

On peut résoudre cette équation avec Maple

```
dsolve(x*(x-4)*D(y)(x)+(x-2)*y(x)=0,y(x));
```

La solution obtenue s'interprète en fonction du signe du contenu de la racine pour affirmer que la solution de H est

$$y_1(x) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{-x(4-x)}} \text{ sur } I_1, y_2(x) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{x(4-x)}} \text{ sur } I_2 \text{ et } y_3(x) = \frac{\lambda_3}{\sqrt{x(x-4)}} \text{ sur } I_3$$

Pour raccorder deux solutions y_1 et y_2 en 0, la seule possibilité est que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ car sinon il y a divergence en 0. De même, pour raccorder y_2 et y_3 en 4, la seule possibilité est $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Au final, en dehors de la fonction nulle qui est solution sur $\mathbb{R}$, les fonctions y_1, y_2, y_3 définies pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ sont les solutions maximales de E.
b) La mise en place de la méthode la variation constante invite aux déterminations des primitives de

$$\frac{1}{\sqrt{-x(4-x)}} \text{ sur } I_1, \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} \text{ sur } I_2 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{x(x-4)}} \text{ sur } I_3$$

On obtient celles-ci par les commandes

```
int(1/sqrt(-x*(4-x)),x);

int(1/sqrt(x*(4-x)),x);

int(1/sqrt(x*(x-4)),x);
```

La première expression obtenue est un logarithme d'un contenu négatif, on pourra y préférer une expression à l'aide de la fonction argch...
On obtient comme solution générale à l'équation E :

$$y_1(x) = \frac{2\mathrm{argch}\left(\frac{2-x}{2}\right) + \lambda_1}{\sqrt{-x(4-x)}} \text{ sur } I_1, y_2(x) = \frac{2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) + \lambda_2}{\sqrt{x(4-x)}} \text{ sur } I_2$$

$$\text{et } y_3(x) = \frac{-2\mathrm{argch}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \lambda_3}{\sqrt{x(x-4)}} \text{ sur } I_3$$

c) Pour raccorder une solution y_1 et une solution y_2 en 0, il est nécessaire que $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \pi$.
La fonction ainsi obtenue est alors dérivable en 0 et solution de l'équation différentielle E comme on peut le vérifier en procédant à un développement limité

```
series((2*arccosh((2-x)/2))/sqrt(-x*(4-x)),x=0);

series((2*arcsin((x-2)/2)+Pi)/sqrt(x*(4-x)),x=0);
```

Pour raccorder une solution y_2 et une solution y_3 en 4, il est nécessaire que $\lambda_2 = -\pi$ et $\lambda_3 = 0$.
La fonction ainsi obtenue est alors dérivable en 4 et solution de l'équation différentielle E.
Résumons :
Les deux fonctions précédemment proposées sont solutions maximales de E sur respectivement $]-\infty, 4[$ et $]0, +\infty[$. En dehors de celles-ci, les solutions maximales sont les fonctions y_1, y_2, y_3 proposées ci-dessus pour $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq \pm\pi$ et $\lambda_3 \neq 0$.

Exercice 65 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0, +\infty[$.
Sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$,

$$\int \frac{3\ln x + 1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x = 3\ln x + \ln|\ln x| + C^{te}$$

Solution générale sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

$$y(x) = \lambda x^3 |\ln x|$$

Solution sur $]0, +\infty[$.
Soient $y :]0, 1[\cup]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ solution de l'équation sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0, 1[$ et $y(x) = \mu x^3 \ln x$ sur $]1, +\infty[$.
La continuité en 1 donne $y(1) = 0$ sans conditions sur λ et μ.
La dérivabilité en 1 donne $\lambda = \mu$.
Ainsi $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0, +\infty[$ qui est évidement solution.

Exercice 66 : [énoncé]
a) On résout l'équation différentielle linéaire étudiée et, par la méthode de variation de la constante, on obtient la solution générale suivante

$$g(x) = \lambda x + x\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par une intégration par parties, on peut écrire

$$g(x) = \lambda x - f(x) + xf(1) + x\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Quand $x \to 0^+$, on a

$$\left|\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \|f'\|_{\infty,[0,1]}\, x\,|\ln x|$$

et on obtient

$$g(x) \to -f(0)$$

Quand $x \to 0^+$

$$\frac{1}{x}\left(g(x) - g(0)\right) = \lambda - \frac{f(x) - f(0)}{x} + f(1) + \int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Le terme $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ converge vers $f'(0)$.
Si $f'(0) \neq 0$ alors l'intégrale $\int_{]0,1]} \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge et donc le terme $\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. On en déduit qu'alors g n'est pas dérivable en 0.
L'égalité $f'(0) = 0$ est une condition nécessaire à la dérivabilité de g en 0. Cette condition n'est pas suffisante. En effet considérons une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\ln x}$$

L'intégrale $\int_{]0,1]} \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ demeure divergente alors que $f'(0) = 0$.
b) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $f'(0) = 0$ on peut écrire

$$f(x) = f(0) + x^2\varphi(x) \text{ pour tout } x > 0$$

avec $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et convergeant vers $f''(0)/2$ en 0^+.
On a alors pour tout $x > 0$

$$g(x) = \lambda x + xf(0) - f(0) + x\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0, +\infty[$ car φ y est de classe $\mathcal{C}^2$.
On prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0) = -f(0)$

$$g'(x) = \lambda + f(0) + x\varphi(x) + \int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Quand $x \to 0^+$, g' converge et donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

$$g''(x) = 2\varphi(x) + x\varphi'(x)$$

Or

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{x^2} - 2\frac{f(x) - f(0)}{x^3}$$

donc

$$g''(x) = \frac{f'(x)}{x} = \frac{f'(x) - f'(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} f''(0)$$

On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$

Exercice 67 : [énoncé]
a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Après résolution via variation de la constante, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{x+\lambda}{\ln x}$$

b) Par opérations, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1/2, +\infty[$.
Pour $x \in]-1, 1[$ on a le développement en série entière

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

et si $x \neq 0$, on obtient

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Si l'on pose $g(0) = 1$, la relation précédente reste valable pour $x = 0$ et ainsi on a prolongé g en une fonction développable en série entière sur $]-1, 1[$.
Ce prolongement est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ puis sur $]-1, +\infty[$.
c) La fonction g est à valeurs strictement positives et on peut donc introduire la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{g(x-1)}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

Ainsi f est solution de (E) sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ et enfin on vérifie aisément que l'équation différentielle (E) est aussi vérifiée quand $x = 1$.